

Controverses

Economie et mathématiques

A partir des années 1940, la mathématisation de la théorie économique dépasse le cercle restreint de quelques économistes-mathématiciens et mathématiciens-économistes poursuivant les démonstrations de l'existence d'un équilibre général concurrentiel et de ses propriétés, pour aller se répandre dans les revues et les programmes d'enseignement offerts par les départements d'économie dans les meilleures universités du monde. Au bout de 50 ans de transmission et de diffusion d'une culture mathématique dans la formation d'économistes, il est devenu difficile de publier un quelconque papier théorique sans modélisation et propositions mathématiquement démontrées.

Aujourd'hui, au niveau mondial, la mathématisation de l'économie est devenue un fait largement observé et mesuré (Debreu, 1991). Mais si en Amérique du Nord la mathématisation de l'économie est encouragée depuis longtemps, en Europe, et surtout en France, à peine elle touche les programmes d'enseignement, après une longue résistance de l'économie sans, ou avec peu, de mathématiques, que les étudiants et certains enseignants sèment le doute sur la pertinence et les fondements de la démarche. Au début des années 2000, une tentative de révision de la place des mathématiques dans la théorie économique y a été menée, sans grand succès (*Problèmes économiques*, 2001 ; *Critique économique*, 2000, 2001).

Au Maroc, la situation est différente. Dans les programmes de la Licence offerts par les départements d'économie, les mathématiques sont parfois utilisées pour présenter la micro-économie et la macro-économie en première année, mais, durant les trois autres années, on n'utilise plus les mathématiques, ni pour démontrer ni pour illustrer, malgré la continuation de l'enseignement des mathématiques, à part. La réforme des programmes en 2003 n'a pas changé la situation de façon importante. Parmi les raisons les plus probables de cette absence de l'utilisation intensive des mathématiques dans la recherche et l'enseignement en économie au Maroc est le fait que la majorité des enseignants-chercheurs ont été formés dans des universités marocaines ou françaises qui considèrent « les » sciences économiques en terme d'écoles de pensée, chacune ayant une idéologie de référence. Certains économistes « insistent » sur le qualificatif « social » en parlant de l'économie comme une science et d'autres vont jusqu'à nier tout

Tahar Mounsif

Université Mohammed V-
Souissi

caractère scientifique à la discipline. La mathématisation de l'économie est alors considérée comme l'œuvre de la théorie néoclassique, et donc comme un simple instrument de domination d'une certaine école de pensée.

De notre point de vue, l'économie est une science comme toutes les autres sciences et sa mathématisation est une démarche qui permet son progrès. Si au début de la mathématisation de la discipline, les mathématiques semblaient n'être puissantes qu'avec certaines hypothèses (rationalité, équilibre, etc.) qui sont le produit de la pensée libérale en économie et qui existaient bien avant la mathématisation de la discipline (Smith, 1776), elles sont actuellement capables de représenter des comportements non tout à fait rationnels et des situations de conflits ouverts et d'évolution. L'objectif de cet article est de montrer que l'économie, utilisant de façon intensive les mathématiques, s'est développée principalement autour du concept d'équilibre concurrentiel des marchés et de l'hypothèse de rationalité des agents économiques, qu'il existe des théories d'équilibres non concurrentiels et qu'il est possible de supposer les agents non toujours parfaitement rationnels.

Brève histoire d'économie mathématique (1)

Un des premiers programmes de recherche en économie mathématique fut celui de Cournot (Cournot, 1838). Considérant une fonction de demande d'un bien comme donnée, avec une « loi observée » de la demande, il analyse l'équilibre d'un marché dans le cas où il y a un seul vendeur, deux vendeurs, plusieurs vendeurs. Une hypothèse du programme était que les vendeurs décident des quantités et donc des prix et sont « responsables » de l'équilibre, appelé *équilibre de Cournot*. Le programme de Cournot (analyse de l'équilibre du monopole, du duopole, de l'oligopole et de la concurrence) avait tourné en variantes de modélisation qui aboutissaient à des équilibres partiels différents (Cournot ou Bertrand ; Cournot ou Stacklberg).

Avec L. Walras, l'économie mathématique a poursuivi une autre démarche (Walras, 1874). Walras a déduit une fonction de demande de la fonction d'utilité de Jevons et, en supposant qu'il existe une dotation initiale, donnée et fixe, des biens économiques et qu'il existe des marchés parfaitement concurrentiels, il démontre qu'il existe un vecteur de prix qui égalisent les demandes individuelles aux dotations initiales. Walras était à l'origine du concept d'*équilibre général d'une économie d'échange*. La formalisation d'une économie d'échange et la conceptualisation de l'idée d'équilibre a permis l'utilisation intensive des mathématiques (algèbre et résolution des systèmes d'équations).

Et bien que la modélisation de départ soit sans production, sans temps et sans incertitude, elle constitue le début d'un long travail de construction mathématique d'une théorie économique générale. En effet, quelques années plus tard, au début du 20^e siècle, il y a eu les travaux d'Antonelli (déduction des propriétés de la demande à partir des préférences), de Barone (possibilité

(1) Cette histoire est largement inspirée de l'allocution présidentielle du professeur d'économie mathématique, C. Bronsard, au 33^e Congrès annuel de la Société canadienne de science économique, 19 mai 1993.

d'implantation de l'optimum économique dans des contextes autres que celui d'une économie de propriété privée) et surtout de V. Pareto (Pareto, 1906), devenu célèbre par les deux théorèmes du bien-être social (l'équilibre concurrentiel est un optimum social et un état de rendement social optimal peut toujours être un équilibre concurrentiel, à condition de partir d'une certaine distribution des dotations initiales).

Durant les années 1940 et au début des années 1950, la production, le temps et le risque ont été introduits dans la modélisation d'une économie de marché à l'aide de l'hypothèse des marchés complets (il existe pour chaque bien un ensemble de production convexe, un marché à terme et un marché contingent). Les progrès dans l'axiomatisation des décisions économiques rationnelles (fonction d'utilité de Von Neumann-Morgerstern et fonction d'utilité de Savage) et l'utilisation de nouvelles mathématiques (topologie générale, théorème de point fixe de Kakutani) ont permis alors de démontrer le théorème de l'existence de l'équilibre walrasien, étendu à l'incertain (équilibre contingent d'Arrow, 1953) et au temps (équilibre inter-temporel de Malinvaud, 1953). La synthèse, réalisée par Arrow et Debreu, fut nommée : équilibre général d'Arrow-Debreu : « le jour du marché universel », tous les prix d'équilibre, pour chaque période de temps présent et futur et pour chaque « état du monde », sont déterminés et connus par tous les agents. L'équilibre général d'Arrow-Debreu n'a pas, bien entendu, de contenu réel.

L'équilibre inter-temporel suppose la possibilité de « conclure » tous les marchés présents et futurs à la date 0. Il est en fait un équilibre statique malgré la prise en compte du temps. Pour tenir compte de la dynamique économique, l'hypothèse du marché universel est alors remplacée par deux autres hypothèses : il n'existe que des marchés au comptant et des marchés financiers et les agents économiques font des « anticipations rationnelles ». Seuls les prix d'équilibre courants des biens et des actifs sont connus, les prix futurs sont anticipés. On parle d'équilibre temporaire. On démontre alors que si on anticipe « bien » et s'il n'y a pas de défaillance des marchés financiers, une suite d'équilibres temporaires coïncide avec un équilibre inter-temporel. De même, seuls les prix d'équilibre anticipé sont connus et on parle alors d'un équilibre conditionnel, plus réaliste qu'un équilibre contingent. Les années 1970 et 1980 ont connu des tentatives de synthèse du temporaire et du conditionnel, avec l'hypothèse des anticipations rationnelles (Radner, 1982) ou avec les fonctions d'anticipation de Hicks (Grandmont, 1983) et à l'aide de nouvelles mathématiques : la topologie différentielle (Balasko, 1988).

L'économie mathématique connaît au moins trois problèmes. Le premier est la multiplicité des équilibres qui fait qu'on ne voit pas comment les agents vont rationnellement anticiper le « même » équilibre, dans une économie supposée être basée sur la décentralisation des décisions et la libre concurrence. Et si plusieurs équilibres concurrentiels sont possibles, faut-il alors supposer qu'il existe des *arrangements institutionnels* et des *concertations*

pour un équilibre économique donné ? Qui négocie quoi et avec quel rapport de force ?

Les deux autres problèmes sont la non considération des rendements d'échelle croissants, ce qui exclue toutes les dynamiques asymétriques, et la modélisation des entreprises comme des boîtes noires, ce qui évacue tous les aspects organisationnels et sociaux de la production. Or, les rendements d'échelle sont croissants dans les activités modernes développant, ou liées au développement, de nouvelles technologies. Dans ces activités, le monopole au niveau national, voire international, peut être efficace. De plus, l'existence même des entreprises est une preuve de l'existence d'autres mécanismes que les marchés pour allouer les ressources.

Mais les promesses de la poursuite du programme de recherche de l'économie mathématique sont importantes. Il s'agit d'une axiomatisation conjointe des préférences et des anticipations. Il s'agit de l'unification de la science économique (micro et macro-économie) et de la production de formes structurelles permettant le développement de l'économétrie appliquée (Bronsard, 1993). Il s'agit enfin d'une possibilité d'évaluer les institutions sociales et politiques qui organisent l'échange et la production.

Théorie des jeux et économie moderne

La science économique avait, surtout, développé les intuitions d'équilibre général et d'efficacité d'une économie concurrentielle jusqu'au début des années 1930. La faiblesse des mathématiques utilisées dans la formalisation du programme de Cournot a retardé son développement durant un temps. Mais, durant les années 1930, de brillants mathématiciens et économistes ont développé la théorie des jeux en économie. C'était ce qui manquait au développement du programme de Cournot : une autre économie mathématique dans laquelle les producteurs-vendeurs sont responsables de l'équilibre.

Durant les années 1940, les processus de décision rationnelle en situations incertaines ont été suffisamment bien formalisés et la formalisation des situations économiques sous forme de jeux a permis l'utilisation intensive des mathématiques (Von Neumann et Morgenstern, 1944). Nash propose une formalisation générale de l'équilibre des jeux non-coopératifs à N personnes : l'équilibre de Nash (2). La démonstration de l'existence de cet équilibre a fait recours au théorème de point fixe de Kakutani (Nash, 1950, 1953) (3). Le problème de la multiplicité des équilibres non coopératifs s'est rapidement posé. De plus, l'incomplétude et l'imperfection des informations et la nature dynamique de beaucoup de situations n'avaient pas été formalisées.

A la fin des années 1960, à l'aide d'une meilleure formalisation des jeux (jeux en forme extensive) qui permet de tenir compte de la dynamique de certains jeux et des problèmes d'information, deux raffinements de l'équilibre de Nash ont été conçus : équilibre de Nash Parfait (rationalité des décisions

(2) On peut trouver l'idée de l'équilibre de Nash chez Cournot (Tirole, 1995, Tome II, p. 29).

(3) Nash a aussi développé une théorie axiomatique des négociations et le concept d'équilibre coopératif ; mais les travaux ultérieurs ont surtout analysé les jeux non coopératifs, au détriment de la modélisation de l'activité économique comme un processus de négociation, de concertation et parfois de conflit régulé par les rapports de force et les institutions.

même en dehors du chemin de l'équilibre) (Selten, 1975) et équilibre de Nash Bayesian (équilibre Statique avec information incomplète) (Harsanyi, 1967-1968). Durant les années 1970, J. Harsanyi et R. Selten ont développé la synthèse d'un équilibre dynamique avec information incomplète (équilibre de Nash Bayesian Parfait). En 1988, ils publient « A General Theory of Equilibrium Selection in Games ». Ils ont aussi généralisé la solution de Nash aux jeux coopératifs avec information incomplète.

La théorie des jeux a aussi conçu un équilibre dans lequel les joueurs se trompent. La rationalité et l'intelligence des joueurs n'excluant plus les erreurs, et en supposant tout de même que la probabilité de choisir des actions non prescrites par les stratégies optimales est très faible, un équilibre a été conçu et baptisé équilibre de la main tremblante (Selten). A son tour, cet équilibre a été raffiné par le concept d'équilibre propre : la probabilité de se tromper et choisir la 2^e bonne action (plutôt que la meilleure) est très faible et la probabilité de choisir la 3^e bonne action est plus faible que la probabilité de choisir la deuxième, etc. (Myerson, 1978). Une main tremblante n'est donc pas une main qui s'agite.

Rationalité limitée : folie et vertu

Le développement de la théorie des jeux en économie a connu certaines accélérations grâce à de simples exemples qui ont retenu beaucoup d'attention et parfois provoqué des expérimentations et des débats. L'exemple le plus populaire est le jeu du « dilemme du prisonnier » répété un nombre fini de fois. L'équilibre non coopératif est une situation mauvaise pour tous. De meilleures situations pour tous existent ; mais ne sont pas des équilibres rationnels. La rationalité s'oppose alors à l'efficacité. Or, on démontre que s'il y a deux joueurs, il suffit d'une très faible probabilité qu'un joueur soit non rationnel, et s'il y a plusieurs joueurs, il suffit qu'un nombre infime de joueurs soient « fous » (pas rationnels) pour faire émerger, dans les deux cas, la coopération et atteindre l'efficacité. Il suffit donc d'un « grain de folie » pour que même les joueurs rationnels imitent le « fou » pour empêcher la rationalité de saper l'efficacité (Axelrod, 1980 ; Kreps, Milgrom, Roberts et Wilson, 1982 ; Axelrod, 1984 ; Fudenberg et Maskin, 1986).

Il ne s'agit pas là seulement d'erreurs, mais dans un certain sens, la folie ici est une « super-rationalité », qui relève d'espaces non encore sérieusement considérés par l'économie. Cette folie ressemble parfois à la « vertu » quand elle est bienveillance, générosité, altruisme. Certains économistes vont jusqu'à supposer, dès le départ, que les comportements économiques sont normés par des valeurs économiques et morales. La théorie du choix social peut alors contourner l'impasse du théorème d'impossibilité (Arrow, 1951) et déduire des décisions collectives cohérentes à partir des préférences individuellement rationnelles (Sen, 1969, 1970). « La vertu » et le choix social, aussi politique qu'économique, peuvent améliorer le fonctionnement des économies.

En fait, depuis le début de l'utilisation des théories de la décision et des jeux dans la modélisation économique, certains auteurs, conscients de la rationalité limitée des agents économiques (Simon, 1980), ont distingué les problèmes structurés qui peuvent être résolus à l'aide d'algorithmes, des problèmes non structurés qui sont résolus de façon approximative. Alors, sans aller jusqu'à supposer qu'il y a folie ou vertu, il suffit de remarquer que quand les problèmes deviennent complexes, l'optimisation retarde la prise de décision et les individus décident par conviction, faute de temps ou d'information.

Il est donc important de ré-écrire l'hypothèse de rationalité parce que les décisions sont souvent le résultat d'un raisonnement « intelligent » et de « calculs » approximatifs. L'histoire des jeux d'échecs montre que, faute de puissance de calcul suffisante, les meilleurs ordinateurs au monde sont incapables d'évaluer toutes les combinaisons possibles après un coup du jeu d'échecs; comme les règles du jeu ne permettent pas de dépasser trois minutes avant chaque coup, il faut bien jouer avant de terminer tous les calculs nécessaires pour déterminer le coup optimal. Certains programmeurs misent sur l'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs pour trouver « la » stratégie optimale des blancs dans le jeu d'échecs, d'autres misent sur l'intelligence artificielle pour développer des démarches de résolutions heuristiques des problèmes complexes (Chaudet et Pellegrin, 2000). Comment les individus et les groupes prennent-ils des décisions quand il est impossible de tout évaluer et comparer ? D. Kahneman, (Prix Nobel 2002), montre que les jugements en incertitude prennent des raccourcis heuristiques qui diffèrent systématiquement de la théorie des probabilités, à laquelle on fait encore recours pour modéliser la prise de décision en économie. Les agents se trompent et apprennent et les modèles mathématiques devraient permettre de retenir l'hypothèse de comportements « quasi rationnels » qui s'adaptent et évoluent.

Conclusion

La science économique construit des passerelles vers d'autres espaces (famille, éducation, crime, pouvoirs et alliances politiques, mouvements sociologiques) en gardant et en généralisant les concepts de base (rationalité, marché, équilibre, efficacité) et en espérant atteindre une interdisciplinarité grâce aux mathématiques quand celles-ci deviennent le langage et la démarche de toutes les sciences sociales et humaines. La science économique continue aussi de développer un discours non formalisé mais cohérent, qui tient compte de plusieurs aspects (géographie et histoire, sociologie, psychologie, etc.) et qui s'agence avec d'autres discours (politique, idéologique, etc.).

Références bibliographiques

- Arrow K. (1951), *Social Choice and Individual Values*, New York, Wiley.
- Axelrod R. (1980), « Effective Choice in the Prisoner's Dilemma », *Journal of Conflict Resolution*, 24.
- Axelrod R. (1984), *The Evolution of Cooperation*, New York, Basic Books.
- Balasko Y. (1988), *Fondements de la théorie de l'équilibre général*, Economica, Paris.
- Bertrand J. (1883), « Théorie mathématique de la richesse sociale », *Journal des savants*.
- Bronsard C. (1993), « L'histoire de l'économie mathématique racontée à Juliette », allocution présidentielle, société canadienne de science économique, 33^e Congrès annuel, UQAM, 19 mai.
- Chaudet H. et L. Pellegrin (2000), *Intelligence artificielle et psychologie cognitive*, Dunod.
- Cournot A.A. (1838), *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, Paris.
- Critique économique, « Autisme en science économique ? », n° 2, été 2000 et n° 4, hiver 2001, Rabat.
- Debreu G. (1991), « The Mathematization of economic theory », *The American Economic Review*, March.
- Fudenberg D. et E. Maskin (1986), « The Folk Theorem in Repeated Games with Discounting and with Incomplete Information », *Econometrica*, 54.
- Grandmont J.M. (1983), *Money and Value*, Cambridge University Press.
- Harsanyi J. (1967-1968), *Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players*, I, II, III.
- Jeavons W.S. (1871), *la Théorie de l'économie politique*, Londres.
- Kreps D.P., Milgrom J. Roberts et R. Wilson (1982), « Rational Cooperation in the Finitely Repeated Prisoner's Dilemma », *Journal of Economic Theory*, 27.
- Myerson R.B. (1978), « Refinements of the Nash Equilibrium Concept », *International Journal of Game Theory*, 7.
- Nash J.F. (1950), *Equilibrium Points in N-Person Games*, Proceeding of the National Academy of Sciences, 36.
- Nash J.F. (1951), « Noncooperative Games », *Annals of Mathematics*, 54.
- Pareto V. (1906), *Manuel d'économie politique*, Milan.
- Problèmes économiques (2001), « Pétitions et contre-pétitions », n° 2734, La Documentation française, Paris.
- Radner R. (1982), *Equilibrium under Uncertainty*, *Handbook of Mathematical Economics*, II, North-Holland.
- Selten R. (1975), « Reexamining of Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games », *International Journal of Game Theory*, 4.
- Sen A. (1969), *Quasi Transitivity*, *Rational Choice and Collective Decisions*, R.E. Studies.
- Sen A. (1970), *Collective Choice and Social Welfare*, San Francisco : Holden-Day.
- Simon H. (1980), *le Nouveau management : la décision par les ordinateurs*, Economica, Paris.
- Smith A. (1776), *Recherches sur la nature et les causes de la richesse des nations*, Londres.
- Von Neumann J. et O. Morgenstern (1944), *Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton.
- Walras L. (1874), *Eléments d'économie politique pure*, Lausanne.